Supercomputing: a view from financial mathematics

Carlos Vázquez Cendón

Grupo M2NICA (http://dm.udc.es/m2nica)

Departamento de Matemáticas
Universidade da Coruña
CITIC and ITMATI

Financial Mathematics and Supercomputing, September 2018

Plan de la presentación

1. Algunas ideas sobre derivados financieros

2. Oportunidades/necesidades de supercomputación

3. Calibración de modelos de volatilidad estocástica con GPU

J.L.Fernández, A.M.Ferreiro, J.A.García, A.Leitao, J.G.López, C.Vázquez

Colaboración con Banesto

Algunos productos derivados

- Contrato a plazo
- Contrato de Futuros
- Opción

Contrato a plazo (forward)

- Es un contrato para comprar o vender un producto por determinado precio en cierto instante futuro. La posición larga acepta realizar la compra y la posición corta acepta realizar la venta que tiene lugar.
- Lo contrario es un contrato al contado *(spot)* en el que la transacción tiene lugar en el instante actual.

Ejemplo

Un comerciante se compromete a comprar a un agricultor 10000 kilos de cosecha de patatas a 0,33 euros/kilo 6 meses después de la firma del contrato.

Futuros (future)

- Es igual que el contrato a plazo, pero tiene lugar en un mercado regulado, que especifica las condiciones del contrato.

Ejemplo

Un inversor acude al CBOT y le pide a un broker que compre 1 futuro sobre 1000 m^3 de trigo para el mes de julio. El precio resultante será consecuencia del ajuste entre la oferta y la demanda que aparezcan en el CBOT.

Opción (Option)

Es un contrato que da a su poseedor el **derecho** a comprar o a vender una cantidad de activo financiero a un precio determinado antes de o en una determinada fecha

- Es un contrato que da a su poseedor el **derecho** a comprar (opción de compra - call option) o a vender (opción de venta - put option) una cantidad de activo financiero (subyacente - underlying) a un precio determinado (*precio de ejercicio - strike price*) antes de o en una determinada fecha (fecha de ejercicio o vencimiento - expirity date).
- Para obtener el derecho, el poseedor de la opción ha pagado una determinada cantidad (prima - option price)

Ejemplo

Un club de futbol adquiere una opción de compra de un futbolista M (CR7, N, etc) por X millones de euros, que puede ejercer el 31 de agosto de 2019

Pregunta:

¿Cúanto debemos pagar por el contrato?

$$\Downarrow$$

VALORACIÓN

¿Qué es la valoración?

- Precio de mercado del producto $\Leftarrow$ Oferta - Demanda
- Valoración: precio justo de referencia
- Modelos de valoración $\Rightarrow$ Problemas matemáticos y de aproximación numérica

Valoración de opciones (Options pricing)

Consiste en establecer el valor de la prima o el precio del derecho asociado a la opción (*valor de la opción*).

Ejemplo

Hoy (26 de septiembre de 2018) compramos por 1 euro una opción de compra (**call**) sobre una acción de la empresa APPENTRINA con:

PRECIO DE EJERCICIO : 12 euros
FECHA DE EJERCICIO : 15 de enero 2019

Dos posibles valores de la acción el 15 de enero:

- 14 euros (ejercemos) $\to$ Beneficio $= 14 - 12 - 1 = 1$ euro
- 10 euros (no ejercemos) $\to$ Beneficio $= -1$ euro

¿Cuál es el precio justo de la opción hoy?

Opciones vainilla europeas

- Una opción vanilla europea es un contrato que da a su poseedor el derecho a comprar (opción de compra) o a vender (opción de venta) una cantidad de activo financiero a un precio determinado (precio de ejercicio) en la fecha de vencimiento.
- Ejemplo en el MEFF: Opciones sobre el IBEX-35.
- Sólo pueden ejercerse en la fecha de vencimiento.
- Se trata de determinar el valor de la prima en tiempos anteriores al vencimiento.

Opciones americanas

- Una opción vanilla americana es un contrato que da a su poseedor el derecho a comprar (opción de compra) o a vender (opción de venta) una cantidad de activo financiero a un precio determinado (precio de ejercicio) antes de o en la fecha de vencimiento
- Ejemplo en el MEFF: Opciones sobre acciones
- Se trata de determinar el valor de la prima en tiempos anteriores al vencimiento

Hipótesis del modelo de Black-Scholes

- El precio del activo sigue un movimiento browniano geométrico, que verifica la ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dX_t$$

- El tipo de interés libre de riesgo, r, y la volatilidad del activo, σ, son funciones conocidas del tiempo.
- Ausencia de arbitraje: todas las carteras libres de riesgo tienen el mismo tipo de interés r.
- Suponemos que el activo no paga dividendos.
- Mercado con posiciones en corto y largo: se pueden vender opciones sobre activos que no se poseen garantizando su reintegro a vencimiento.

Modelo de precios del activo

- Modelo de precios de activo en tiempo continuo:

$$\underbrace{\frac{dS_t}{S_t}}_{\text{rendimiento relativo}} = \underbrace{\mu\, dt}_{\text{tendencia}} + \underbrace{\sigma}_{\text{volatilidad}} \underbrace{dX_t}_{\text{proceso de Wiener continuo}}$$

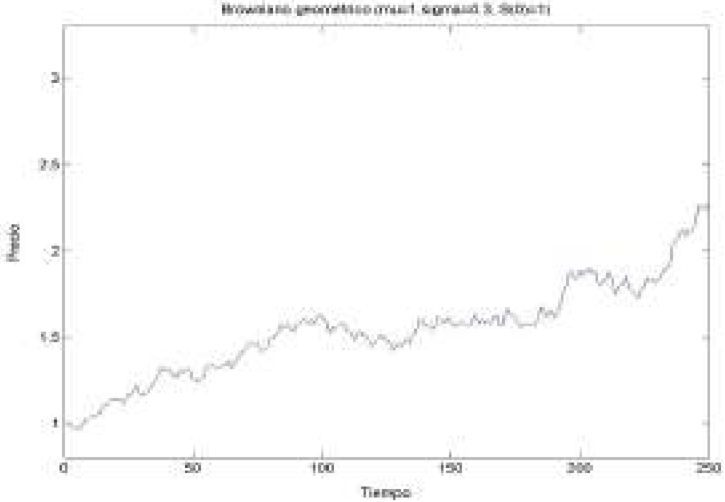
$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dX_t$$

- Utilizando el lema de Ito, se obtiene:

$$S_t = S_0 \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})\, t + \sigma X_t \right)$$

- La expresión anterior permite simular evoluciones de precios para S_0, σ y μ conocidos.

Modelo estocástico del activo



Valoración con Girsanov y Monte Carlo (I)

- En la medida de probabilidad libre de riesgo Q el proceso de precios del activo verifica (Girsanov):

$$dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t$$

$$\mu \Rightarrow r$$

Valoración con Girsanov y Monte Carlo (I)

- En la medida de probabilidad libre de riesgo Q el proceso de precios del activo verifica (Girsanov):

$$dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t$$

$$\mu \Rightarrow r$$

- Si consideramos un producto derivado con precio $V_t = V(t, S_t)$, su valor descontado es martingala bajo Q, por lo tanto:

$$V_t = V(t, S_t) = \exp(-r(T-t))E_Q(V(S,T) \mid \mathscr{F}_t)$$

Valoración de opciones con Girsanov y Monte Carlo (II)

Supongamos que el precio de la opción es $V_t = V(t, S_t)$.

Valoración de opciones con Girsanov y Monte Carlo (II)

Supongamos que el precio de la opción es $V_t = V(t, S_t)$.

- Ecuación estocástica en probabilidad de riesgo neutro (Q):

$$dS_t \quad = \quad rS_t\,dt + \sigma S_t\,dX_t\,, \quad S(0) = S_0$$

Valoración de opciones con Girsanov y Monte Carlo (II)

Supongamos que el precio de la opción es $V_t = V(t, S_t)$.

- Ecuación estocástica en probabilidad de riesgo neutro (Q):

$$dS_t \quad = \quad rS_t\, dt + \sigma S_t\, dX_t\,, \quad S(0) = S_0$$

- Generación de trayectorias en riesgo neutro:

1. Euler

$$S_{t_{i+1}} - S_{t_i} = rS_{t_i}\, dt + \sigma S_{t_i}\, dX_{t_i}$$

2. Solución exacta (log Euler)

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i}\, \exp\left((r - 0,5\,\sigma^2)\, dt + \sigma\sqrt{dt} X_{t_i}\right)$$

Valoración de opciones con Girsanov y Monte Carlo (II)

Supongamos que el precio de la opción es $V_t = V(t, S_t)$.

- Ecuación estocástica en probabilidad de riesgo neutro (Q):

$$dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,dX_t\,, \quad S(0) = S_0$$

- Generación de trayectorias en riesgo neutro:
  1. Euler
  $$S_{t_{i+1}} - S_{t_i} = rS_{t_i}\,dt + \sigma S_{t_i}\,dX_{t_i}$$
  2. Solución exacta (log Euler)
  $$S_{t_{i+1}} = S_{t_i}\,\exp\left((r - 0,5\,\sigma^2)\,dt + \sigma\sqrt{dt}X_{t_i}\right)$$

- Función de pago $h(S)$ para vainilla europeas:
  - $h(S) = \text{máx}(S - E, 0)$ (Call)
  - $h(S) = \text{máx}(E - S, 0)$ (Put)

Valoración de opciones con Girsanov y Monte Carlo (II)

Supongamos que el precio de la opción es $V_t = V(t, S_t)$.

- Ecuación estocástica en probabilidad de riesgo neutro (Q):

$$dS_t \quad = \quad rS_t\, dt + \sigma S_t\, dX_t\,, \quad S(0) = S_0$$

- Generación de trayectorias en riesgo neutro:
  1. Euler
  $$S_{t_{i+1}} - S_{t_i} = rS_{t_i}\, dt + \sigma S_{t_i}\, dX_{t_i}$$
  2. Solución exacta (log Euler)
  $$S_{t_{i+1}} = S_{t_i}\, \exp\left((r - 0{,}5\,\sigma^2)\, dt + \sigma\sqrt{dt} X_{t_i}\right)$$

- Función de pago $h(S)$ para vainilla europeas:
  - $h(S) = \text{máx}(S - E, 0)$ (Call)
  - $h(S) = \text{máx}(E - S, 0)$ (Put)

- Precio de la opción en tiempo $t = 0$:

$$V_0 = V(0, S_0) = \exp(-r(T - 0))\, E_Q(h(S_T))$$

Teorema de Feynman-Kàc

Si S_t verifica la EDE

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dX_t, \quad S_0 = x,$$

son equivalentes las siguientes condiciones:

- Para cada x, el proceso $Y_t = f(t, S_t)$ es martingala
- La función f (de las variables t y x) es solución de la EDP

$$\partial_t f + \mu \partial_x f + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} f = 0$$

Por lo tanto, dada la función h, f es solución del problema de valor final definido por la EDP y la condición final:

$$f(T, x) = h(x)$$

si y solo si

$$f(t, x) = E(h(S_T))$$

lo que permite expresar la solución de la EDP en términos de esperanzas

Valoración de opciones europeas de compra

- Ecuación de Black-Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0, \;\; 0 < t < T, \;\; S > 0$$

- Valor en el vencimiento:

$$C(T,S) = max(S - E, 0), \quad S > 0$$

Fórmula de B-S para opciones europeas de compra

- Solución del problema de valoración anterior:

$$C(t,S) = S\,N(d_1) \;-\; E\,\exp(r(t-T))N(d_2),\;\; 0 < t < T,\;\; S > 0$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\log(S/E) + (r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
d_2 &= \frac{\log(S/E) + (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
N(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp(-y^2/2)\,dy
\end{aligned}$$

La existencia de fórmula analítica es una excepción, aparece en opciones de tipo europeo y en un modelo muy simplificado!!!

Algunos problemas que resuelven los Métodos Numéricos

1. Ecuaciones no lineales
2. Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales
3. Interpolación, derivación e integración numéricas
4. Ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales
5. Ecuaciones diferenciales estocásticas
6. Optimización numérica

Algunos problemas que resuelven los Métodos Numéricos

1. Ecuaciones no lineales
2. Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales
3. Interpolación, derivación e integración numéricas
4. Ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales
5. Ecuaciones diferenciales estocásticas
6. Optimización numérica

Estos problemas aparecen en valoración financiera

Algunos problemas que resuelven los Métodos Numéricos

1. Ecuaciones no lineales
   Cálculo de la TIR de un bono
2. Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales
   Valoración con modelos de Black-Scholes
3. Interpolación, derivación e integración numéricas
   Cálculo de griegas de opciones
4. Ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales
   Modelos de Black-Scholes de uno y varios factores estocásticos
5. Ecuaciones diferenciales estocásticas
   Evolución de precios de activos, de tipos de interés, etc.
6. Optimización numérica
   Calibración, gestión de carteras, etc.

Estos problemas aparecen en valoración financiera

Algunos problemas financieros que requieren HPC

1. Simulación de precios de activos o evolución de tipos de interés
2. Valoración de derivados con modelos de ecuaciones en derivadas parciales
3. Valoración de derivados con técnicas tipo Monte-Carlo
4. Valoración de derivados con BSDEs
5. Calibración de modelos
6. Optimización y gestión de carteras de activos, de pasivos y de activos-pasivo, ALM

Algunos problemas financieros que requieren HPC

1. Simulación de precios de activos o evolución de tipos de interés

2. Valoración de derivados con modelos de ecuaciones en derivadas parciales

3. Valoración de derivados con técnicas tipo Monte-Carlo

4. Valoración de derivados con BSDEs

5. Calibración de modelos

6. Optimización y gestión de carteras de activos, de pasivos y de activos-pasivo, ALM

Algunos problemas financieros que requieren HPC

1. Simulación de precios de activos o evolución de tipos de interés
   Elevado número de sendas con dinámicas gobernadas por ecuaciones diferenciales estocásticas
2. Valoración de derivados con modelos de ecuaciones en derivadas parciales
   Elevado número de factores $\Rightarrow$ Elevada dimensión
3. Valoración de derivados con técnicas tipo Monte-Carlo
   Elevado número de factores, ejercicio anticipado
4. Valoración de derivados con BSDEs
   Elevado número de factores
5. Calibración de modelos
   Métodos numéricos de optimización (alta dimensión)
6. Optimización y gestión de carteras de activos, de pasivos y de activos-pasivo, ALM
   Métodos numéricos de optimización, simulación

Calibración de modelos de volatilidad estocástica con GPU

J.L. Fernández, A.M. Ferreiro, J.A. García,

A. Leitao, J.G. López-Salas, C. Vázquez

(Colaboración con Banesto)

El modelo SABR estático

SEDE para la dinámica de precios futuros y volatilidad (Hagan & al., 2002):

$$\begin{aligned} dF_t &= \alpha_t F_t^{\beta} dW_t^1, \qquad F_0 = \hat{f}, \\ d\alpha_t &= \nu \alpha_t dW_t^2, \qquad \alpha_0 = \alpha, \end{aligned}$$

- $F_t = S_t e^{(r-q)(T-t)}$ precios *futuros* del activo subyacente S
  r: tipo de interés libre de riesgo
  q: tasa de dividendos constante
- α_t: volatilidad del activo
- dW^1, dW^2: procesos brownianos correlados ($dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$)
- S_0: precio actual del activo

El modelo SABR estático

SEDE para la dinámica de precios futuros y volatilidad (Hagan & al., 2002):

$$\begin{aligned} dF_t &= \alpha_t F_t^{\beta} dW_t^1, \qquad && F_0 = \hat{f}, \\ d\alpha_t &= \nu \alpha_t dW_t^2, \qquad && \alpha_0 = \alpha, \end{aligned}$$

- $F_t = S_t e^{(r-q)(T-t)}$ precios *futuros* del activo subyacente S
  r: tipo de interés libre de riesgo
  q: tasa de dividendos constante
- α_t: volatilidad del activo
- dW^1, dW^2: procesos brownianos correlados ($dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$)
- S_0: precio actual del activo

Parámetros del modelo:

- $\alpha > 0$: nivel de referencia de la volatilidad
- $0 \leq \beta \leq 1$: elasticidad de la varianza
- $\nu > 0$: volatilidad de la volatilidad
- ρ: coeficiente de correlación entre volatilidad y precios

El modelo SABR estático

Fórmula aproximada de la volatilidad impícita (Hagan & al., 2002)

$$\sigma_{model}(K,\hat{f},T) = \frac{1}{\omega}\left(1 + A_1 \ln\left(\frac{K}{\hat{f}}\right) + A_2 \ln^2\left(\frac{K}{\hat{f}}\right) + BT\right)$$

donde los coeficientes A_1, A_2 y B están dados por

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{1}{2}(1-\beta-\rho\nu\omega) \\
A_2 &= \frac{1}{12}((1-\beta)^2 + 3((1-\beta)-\rho\nu\omega) + (2-3\rho^2)\nu^2\omega^2) \\
B &= \frac{(1-\beta)^2}{24}\frac{1}{\omega^2} + \frac{\beta\rho\nu}{4}\frac{1}{\omega} + \frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2
\end{aligned}$$

y el valor de ω es

$$\omega = \frac{\hat{f}^{1-\beta}}{\alpha}$$

Calibración del modelo SABR

Se trata de obtener un conjunto de parámetros del modelo que ajusten lo mejor posible los datos de mercado

$$Data_{market}(K_j, \hat{f}, T_i) \approx Data_{model}(K_j, \hat{f}, T_i).$$

Para ello, se siguen varios pasos:

- Decidir qué se ajusta: (precios o volatilidades)
- Elegir datos de mercado suficientemente representativos del mismo
- Elegir la medida del error para comparar resultados del modelo y mercado
- Elegir un algoritmo de optimización (local o global)
- Fijar (si se cree conveniente) algunos parámetros de antemano
- Comparar los resultados obtenidos

  Si los resultados son suficientemente satisfactorios, se usarán los parámetros para valorar otros productos más complejos

Calibración del modelo SABR

Funciones de coste:

- Calibrado individual: se calibran los parámetros para cada vencimiento T_i, por ejemplo usando

$$f_{i,E}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{m_i} \left(\frac{Data_{market}(K_j,\hat{f},T_i) - Data_{model}(K_j,\hat{f},T_i)}{Data_{market}(K_j,\hat{f},T_i)} \right)^2 (\boldsymbol{x}), \qquad (1)$$

  donde $\boldsymbol{x}$ es el vector de parámetros a calibrar.

- Calibración conjunta: se calibran conjuntamente todos los vencimientos, por ejemplo usando

$$f_E(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m_i} \left(\frac{Data_{market}(K_j,\hat{f},T_i) - Data_{model}(K_j,\hat{f},T_i)}{Data_{market}(K_j,\hat{f},T_i)} \right)^2 (\boldsymbol{x}). \qquad (2)$$

Calibración: EURO STOXX 50

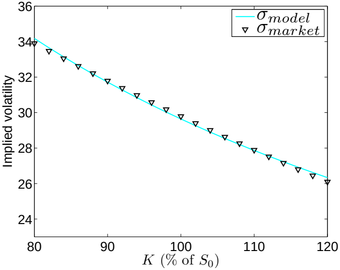
Utilizando la volatilidad implícita para calcular la volatilidad del modelo

Calibración individual (para cada vencimiento)

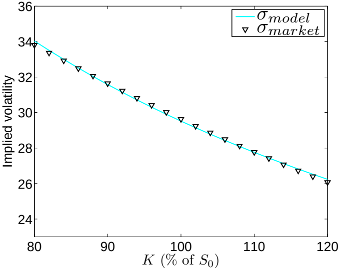
	3 meses	6 meses	12 meses	24 meses
α	0,298999	0,302060	0,289271	0,277844
β	1,0	1,0	1,0	1,0
ν	0,382558	0,381724	0,308560	0,264178
ρ	$-1,0$	$-1,0$	$-0,999729$	$-1,0$

Parámetros calibrados para cada vencimiento con el modelo SABR estático y datos de mercado de Diciembre de 2011 de opciones de compra sobre EURO STOXX 50 proporcionados por Banesto

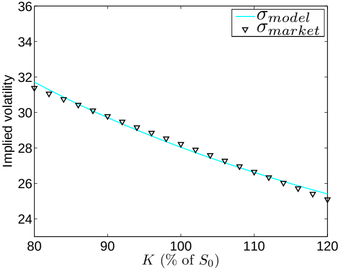
Resultados de calibración de EURO STOXX 50



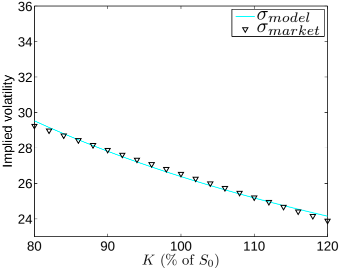
(a) 3 meses.



(b) 6 meses.



(c) 12 meses.



(d) 24 meses.

GPUs y su programación

- Una tarjeta gráfica o GPU (Graphic Processor Units) tiene muchos núcleos

  - Hasta 512 en arquitecturas Nvidia Fermi

  - Hasta 1536 arquitecturas Nvidia Kepler

- La GPU tiene su propia memoria y jeraquías de memoria

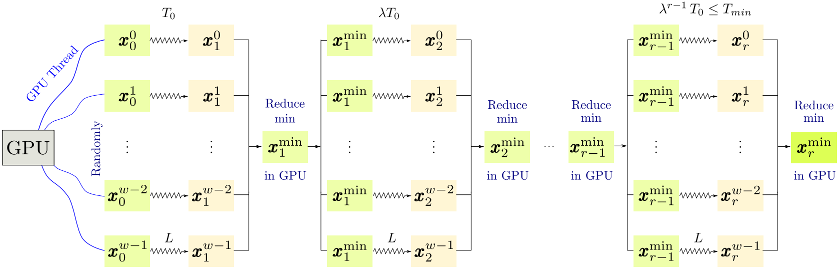
  - Tiene una RAM, independiente de la CPU: el programador tiene que gestionar transferencias entre ellas

  - Jerarquías de memoria: L2 Cache, Shared memory/L1 Cache, Texture Cache, Registros

- CUDA (Computed Unified Device Architecture): API para la programación de GPUs Nvidia

- C/C++ extensiones para gestionar la GPU
  Gestionar eficientemente las memorias es clave para obtener buenos rendimientos

Parallel simulated annealing in GPU



A.M. Ferreiro, J.A. García-Rodríguez, J.G. López, C. Vázquez. An efficient implementation of parallel simulated annealing algorithm in GPUs, *Journal of Global Optimization*, 57 (2013) 863–890.

El software libre CUSIMANN para multi-GPU (C/C++ y CUDA) está en

http://code.google.com/cusimann

Calibración: EURO STOXX 50 en GPU

	CPU (1 thread)	2 threads	4 threads	8 threads	GPU	2 GPUs
Time (s)	4172,746	2096,857	1056,391	545,456	21,955	12,609
Speedup	-	1,99	3,95	7,65	190,06	330,93

EUROSTOXX50. Calibración para $T = 24$ meses: OpenMP vs GPU

- Una vez calibrados los parámetros se pueden valorar otros derivados con Monte Carlo en GPUs
- El calibrado en precios con Monte Carlo deja de ser prohibitivo en GPUs
- Para algunos subyacentes es mejor SABR dinámico

J.L. Fernández, A.M. Ferreiro, J.A. García, A. Leitao, J.G. López-Salas, C. Vázquez. Static and dynamic SABR stochastic volatility models: calibration and option pricing using GPUs.
Mathematics and Computers in Simulation, 94 (2013) 55-75.

Muchas gracias por la atención